**ИНТЕГРАЛЫ**

**1.Первооразная и неопределённый интеграл.**

**Определение 1.1.** Функция называется первообразной функции , если .

**Теорема 1.1.** Если функция является первообразной функции , то , где - произвольная константа, тоже является первообразной функции .

Доказательство теоремы очевидно.

Таким образом, прибавляя к первообразной функции произвольную константу, мы получаем первообразную той же функции. Возникает вопрос: а могут ли существовать у функции две первообразные, отличающиеся не на константу. Оказывается, нет.

**Теорема 1.2.** Если функции и являются первообразными функции , то где - константа.

*Доказательство.* Положим Пусть - произвольные точки из области определения функции Тогда по теореме Лагранжа , где - некоторая точка между . Но ==Следовательно, В силу произвольности точек

**Теорема 1.3.(существования).** Если функция непрерывна на интервале (, то на этом интервале существует её первообразная.

**Определение 1.2**. Неопределенным интегралом называется семейство первообразных функции . То есть,

*,* где .

Справедливы следующие свойства интеграла:

;

;

Приведём таблицу интегралов, которая является обратной таблице производных.

1.

2. =,

3. ;

4.

5. ,

6. =

7.

8. ;

9.

10. +=+;

11. ++;

12. ;

13.

14.

**2.Замена переменной в неопределённом интеграле. Подведение под знак дифференциала.**

Напомним определение дифференциала: Нам удобно её сейчас написать справа налево: . Иногда студенты лучше воспринимают определение дифференциала, если оно написано так:

*.*

Если вместо точек слева и справа подставить одну и ту же функцию, то будет верно.

Легко проверить, что дифференциал, в частности, обладает следующим свойством:

,

где и - константы.

Чтобы вычислить интеграл, не являющийся табличным, часто используется приём подведения той или иной функции под знак дифференциала, которую затем принимают за новую переменную, сводя, тем самым, интеграл к табличному.

Сформулируем сказанное в виде теоремы и поясним примерами.

**Теорема 2.1**, где функция и её производная непрерывны соответственно на интервалах и , функция обратима на интервале функция непрерывна на интервале , где , . Тогда , где - первообразная функции

Теорема доказывается дифференцированием обеих частей последнего равенства.

На практике при вычислении интегралов осуществляются следующие выкладки:

==

.

В прямых скобках осуществляется замена переменной. А в конце происходит возврат к переменной

**Пример 2.1.** =

.

**Пример 2.2.**

**Пример 2.3.**

После того, как приобретён определённый опыт, замену переменной можно осуществлять в уме и не писать букву *t,* как таковую.

**Пример 2.4.** =

Но на первых порах рекомендуется выписывать замену переменной.

В предыдущих примерах рассматривались только линейные замены переменной. Рассмотрим более сложные замены переменной.

**Пример 2.5.** =

Аналогично вычисляется интеграл от арккотангенса.

**Пример 2.6.** =

*=.*

Следующий интеграл очень важен. Подобные интегралы будут часто встречаться при интегрировании рациональных дробей.

**Пример 2.7.** ====.

**Пример 2.8.**

==

**Пример 2.9.** ====

===.

**Пример 2.10. =**==

==.

**Пример 2.11.** ===

=

**Пример 2.12.**

=.

**Пример 2.13.** ====

**Пример 2.14.** =

**Пример 2.15.**

=.

**Пример 2.16. =**

**=**==.

**Пример 2.17.** =**.**

=.

**Пример 2.18.** ===

=

**Пример 2.19.** ===

=+=

=+

**3.Формула интегрирования по частям.**

**Теорема 3.1.** Если – дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям

*,*

Или, что то же самое,

*.*

*Доказательство.* Формула интегрирования по частям является следствием правила дифференцирования произведения. Действительно, если проинтегрировать обе части равенства

,

То получим

,

Откуда очевидным образом следует формула интегрирования по частям.

Смысл применения состоит в том, что при правильным образом выбранной функции , после того, как она попадёт под знак дифференциала, интеграл упростится. Часто формулу интегрирования по частям бывает необходимо применять повторно.

Приведём примеры интегралов, которые вычисляются по формуле интегрирования по частям, и укажем при этом, какую функцию нужно выбирать в качестве

Ниже будем предполагать натуральным, а и вещественными.

,

,

, ;

,

,

,

,

, ;

;

.

Последние четыре интеграла нуждаются в отдельном объяснении.

Рассмотрим конкретные примеры.

**Пример 3.1.** =

==

=+.

**Пример 3.2.** ==

==

.

**Пример 3.3.** ==

.

**Пример 3.4.** =

*=.*

Мы здесь воспользовались результатом предыдущего примера.

**Пример 3.5.**

=

=+*c.*

Покажем, как вычисляются интегралы типа последних четырёх из приведённых выше.

**Пример 3.6.** Пусть . Нужно дважды проинтегрировав по частям, прийти к исходному интегралу и из алгебраического равенства найти интеграл. Заметим, что не имеет значения, какую функцию брать в качестве функции . Но если при первом интегрировании по частям в качестве функции выбрана экспонента, то и при втором интегрировании по частям следует в качестве выбрать экспоненту. А если в первый раз выбрана тригонометрическая функция, то и во второй раз следует выбрать тригонометрическую функцию.

=

*.*

Получили равенство

,

Откуда

+*с.*

Константа *с* возникает из самого определения неопределённого интеграла.

**Пример 3.6.** =

+.

Получили равенство

+,

Откуда

+.

Заметим, что не имеет значения, представлять ли произвольную константу в виде

**Пример 3.7.** Интеграл вычисляется аналогично предыдущему с той лишь разницей, что вместо арксинуса возникнет интеграл 14 из таблицы интегралов.

**4.Интегрирование рациональных дробей.**

**Определение 4.1.** Рациональной дробью называется функция вида

, (4.1)

где и - многочлены степеней соответственно при этом дробь предполагается несократимой.

**Определение 4.2.** Рациональная дробь называется правильной, если и - неправильной, если .

**Определение 4.3.** Простейшими рациональными дробями называются следующие дроби:

1) ;

,

3) , где

4) , где

Сразу отметим , что интегрированием дроби вида 4) мы заниматься не будем.

Простейшая дробь вида 1) интегрируется следующим образом:

Простейшая дробь вида 2) интегрируется следующим образом:

Как интегрируется простейшая дробь вида 3), рассмотрим на примере.

**Пример 4.1.** Пусть . Заметим, что дискриминант знаменателя подынтегральной дроби отрицательный. Действительно, Преобразуем подынтегральную дробь, выделив в знаменателе полный квадрат. Тогда:

*+*

*++=+=*

*=.*

Заметим, что пока сохраняется в сумме хотя бы один интеграл, не нужно прибавлять произвольную константу *c.*

Перейдём к интегрированию рациональных дробей, не являющихся простейшими.

Для того, чтобы проинтегрировать неправильную рациональную дробь ( нужно прежде всего, разделив числитель дроби на знаменатель (в столбик), представить дробь в виде «целая часть + правильная дробь». Всё станет понятно после рассмотрения примеров. Заметим, что мы ограничимся такими примерами, когда деление можно легко осуществить, не применяя деления в столбик.

Таким образом, всё сводится к интегрированию правильных дробей.

Для интегрирования правильных дробей нужно сначала разложить знаменатель дроби на множители, а затем дробь на сумму простейших.

Опишем кратко, как многочлен разлагается на множители.

По основной теореме алгебры и следствию из теоремы Безу (их точные формулировки здесь не приводятся) всякий многочлен степени можно разложить на произведение множителей вида c коэффициентом , где – вещественные или комплексные корни многочлена, среди которых могут быть и кратные. Заметим, что вместе с комплексным корнем корнем многочлена является и сопряжённое число . Тогда

*,* где , ; легко проверить, что дискриминант этого квадратного трёхчлена отрицательный, что, впрочем, понятно и из того, что его корни комплексные.

Что касается разложения правильной дроби на множители, то не приводя общих теорем, трудных для восприятия, продемонстрируем это на примерах.

**Пример 4.2.** .

Выпишем подынтегральную дробь: . Это - правильная дробь. Разложим её знаменатель на множители: .

Будем искать её разложение на сумму простейших дробей в виде:

, где и - коэффициенты, которые нужно найти.

Для их вычисления приведём дроби к общему знаменателю:

.

Известно, что для того, чтобы дроби с равными знаменателями были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы их числители были тождественно равны.

Следовательно,

(4.2)

Приведём два способа нахождения коэффициентов из равенства (4.2).

*Первый способ.* Положив в равенстве (4.2) , получим: 4откуда

Положив в равенстве (4.2) , получим: 4откуда

*Второй способ.* Раскроем в (4.2) скобки и перегруппируем слагаемые:

*.*

Будем рассматривать это равенство как равенство двух многочленов. Для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно , чтобы коэффициенты при соответствующих степенях были равны.

Поскольку справа коэффициент при равен нулю, а свободный член равен 1, то получаем систему уравнений

Решая её, получаем:

Заметим, что первый способ удобен в том случае, когда все корни знаменателя дроби вещественные и различные (как в рассматриваемом случае), а второй является более универсальным.

Таким образом, получили, что

.

Тогда

*.*

Заметим, что аналогично вычисляется табличный интеграл 14 в общем виде.

**Пример 4.3.** .

Выпишем подынтегральную дробь: . Эта дробь является неправильной. Выделим целую часть. Для этого (не прибегая к делению в столбик) преобразуем ей следующим образом:

=.

1- это целая часть, а является правильной дробью. Вычислив корни знаменателя, разложим его на множители:

.

Будем искать разложение этой дроби на сумму простейших в виде:

.

Для нахождения коэффициентов приведём дроби к общему знаменателю:

,

откуда

*.*

Определим коэффициенты первым способом:

; .

Тогда

,

=.

**Пример 4.4.** .

Выпишем подынтегральную дробь: .Эта дробь является правильной. Разложим знаменатель на множители:= . Особо подчеркнём, что множитель порождает в разложении дроби на простейшие два слагаемых - и .

Общее: если в разложении знаменателя есть множитель , то он порождает в разложении дроби слагаемых

, .

Тогда разложение дроби будем искать в виде:

= .

Приведём дроби к общему знаменателю:

.

Особо отметим, что дроби следует приводить к наименьшему общему знаменателю, то есть к тому знаменателю, который был у исходной дроби.

Тогда

Заметим, что первый способ нахождения коэффициентов в чистом виде в данном случае не применим, так как коэффициентов три. А корней у знаменателя всего два (один корень кратный). Тем не менее, можно применить комбинированный метод из первого и второго:

Для нахождения коэффициента мысленно раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и выпишем коэффициент при старшей степени Он равен . Поскольку в правой части равенства коэффициент при равен нулю. То .

Таким образом,

*.*

Тогда

*=.*

**Пример 4.5.** .

Выпишем подынтегральную дробь, которая является правильной.

.

Разложим знаменатель на множители.

.

Множитель знаменателя породит в разложении дроби слагаемое . Множитель не разлагается на множители, так как у него нет вещественных корней, и особо отметим, что в разложении дроби он порождает слагаемое

.

Таким образом, разложение нужно искать в виде:

.

Приведем дроби к общему знаменателю:

,

откуда

Заметим, что у знаменателя только один вещественный корень, а искомых коэффициентов три. Поэтому в данном случае целесообразно находить коэффициенты вторым способом. Для этого раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

Тогда получим систему уравнений:

Находим: , , .

Тогда

Вычислим последний интеграл:

*==*

*=*

Тогда

.

Приведем несколько примеров того, в каком виде нужно искать разложение дроби на сумму простейших. При этом напомним, что если дробь неправильная, то сначала нужно выделить целую часть.

**Пример 4.6.** ==.

Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена в знаменателе последней дроби отрицательный, то разложение правильной дроби ищем в виде:

*.*

**Пример 4.7.** ==.

Теперь квадратный трёхчлен разлагается на множители:

.

Тогда

= .

**Пример 4.8.** .

Дробь является правильной. Тогда имеем:

.

**Пример 4.9.** .

Дробь является правильной. Тогда имеем:

===.

**5.Ещё одна теорема о замене переменной в неопределённом интеграле.**

**Теорема 5.1.** Пусть задан интеграл где функция непрерывна на интервале . Пусть , где функция непрерывна вместе со своей производной и обратима на интервале , где таковы, что . Тогда

=

Эта теорема является обратной теореме 2.1.

Покажем на примере, как в некоторых простых случаях можно избавляться от иррациональностей при вычислении интегралов. Более сложных замен переменной с применением теоремы 2.1 рассматривать не будем.

**Пример 5.1.**

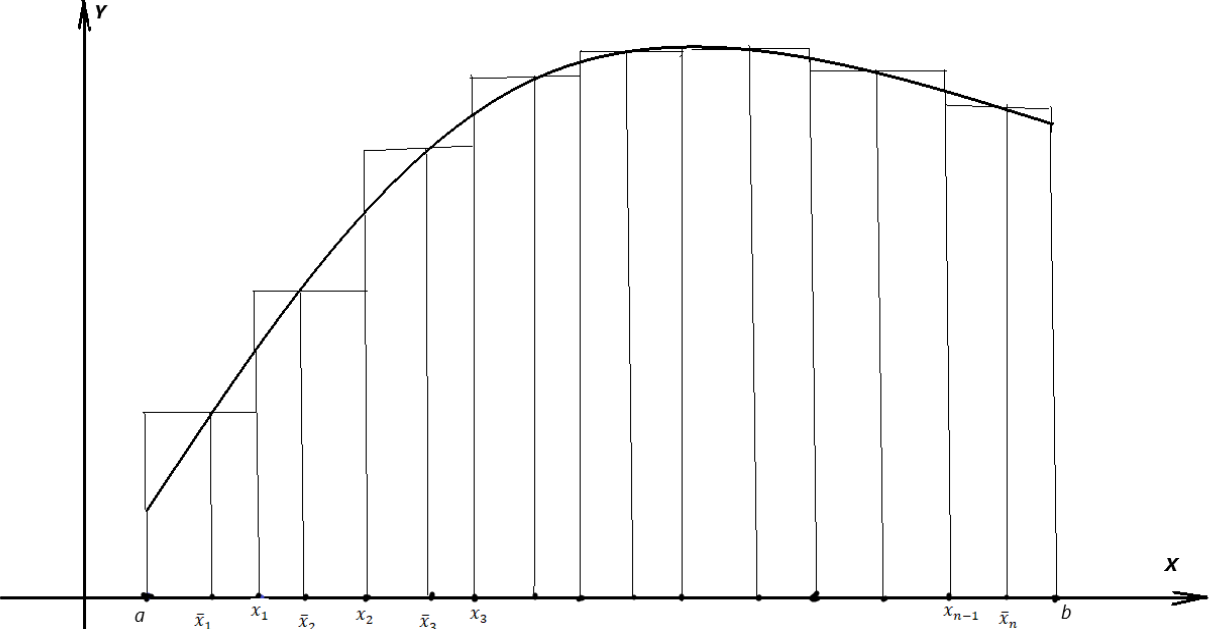
*===.*

**6. Определённый интеграл.**

К понятию определённого интеграла приводит задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Рассмотрим фигуру, ограниченную осью *X*, вертикалями и графиком функции , непрерывной на интервале .

Разобьём интервал точками на интервалы . Обозначим через длину *k*-того интервала: . На каждом из интервалов выберем по точке .

**

Если на интервале считать функцию постоянной и равной ,

то *k*-тая криволинейная трапеция заменится -тым прямоугольником с длинами сторон, равными и , площадь которого равна .

Составим так называемую интегральную сумму

,

Которая равна площади ступенчатой фигуры на рисунке. Чем меньше наибольшая из длин интервалов ,

тем точнее эта сумма приближает площадь криволинейной трапеции.

Если устремить к нулю max , то интегральная сумма будет стремиться к площади криволинейной трапеции.

Заметим, что когда речь идёт о рассмотренной выше площади криволинейной трапеции, то функция на интервале предполагается неотрицательной.

Ниже в определении определённого интеграла этого не предполагается.

**Определение 6.1.** Пусть функция непрерывна на интервале .

Составим для неё вышеописанную интегральную сумму. Тогда определённым интегралом называется

,

если этот предел существует и конечен, не зависит от способа разбиения интервала точками и выбора точек

Особо подчеркнём, что определённый интеграл – это число.

**Теорема 6.1(существования).** Если функция непрерывна на интервале , то определённый интеграл существует.

В приведённом определении предполагалось, что

**Определение 6.2.** .

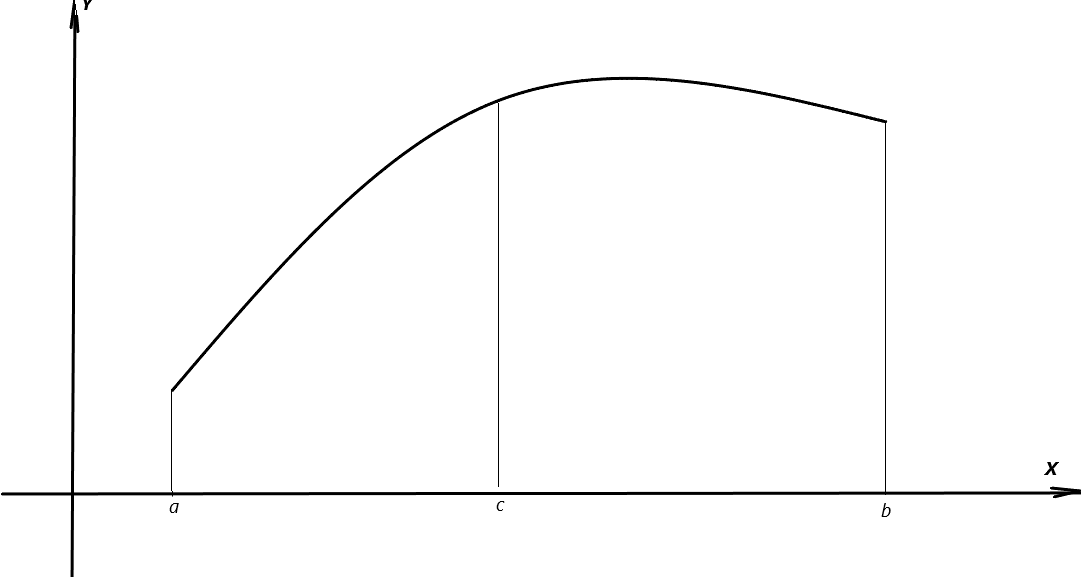
Приведём свойства определённого интеграла.

1) , где - константа;

Свойства 1) и 2) очевидны для интегральной суммы, и доказываются из неё с помощью предельного перехода.

3) .

Не приводя строгого доказательства, ограничимся геометрической иллюстрацией этого свойства. Если то площадь, ограниченная осью *X*, вертикальными прямыми и графиком функции равна сумме площадей ограниченных осью *X*, вертикальными прямыми , графиком функции и осью *X*, вертикальными прямыми и графиком функции .

****

Если , то с учётом определения 6.1смысл свойства 3) объясняется аналогичным образом.

4) Если , то . В частности, если то

Записав соответствующее неравенство для интегральной суммы, справедливость которого очевидна, и осуществив предельный переход, докажем свойство 4).

5) .

Опять записав соответствующее неравенство для интегральной суммы, справедливость которого вытекает из свойств модуля, и осуществив предельный переход, докажем свойство 5).

**Теорема 6.2.** Если функция непрерывна на интервале и - соответственно её наименьшее и наибольшее значения, то справедлива оценка

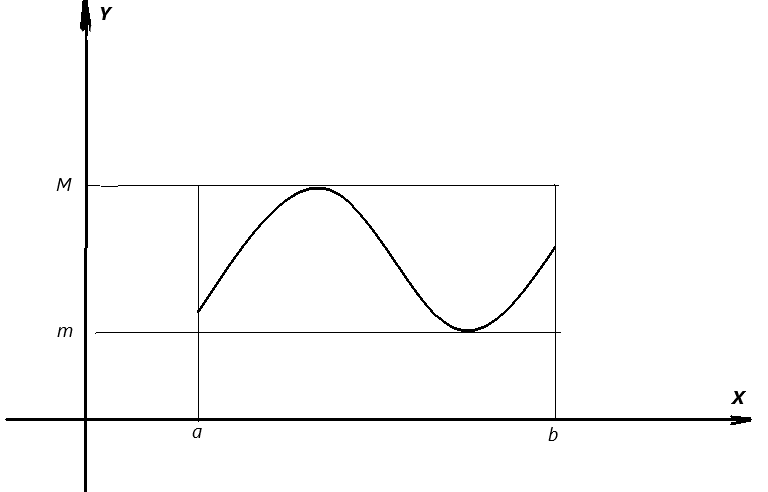
(6.1)

*Доказательство.* Если в интегральной сумме заменить сначала на , а затем на , то получим неравенство

*,*

из которого (6.1) получается с помощью предельного перехода.

Смысл оценки состоит в том, что площадь криволинейной трапеции не меньше площади прямоугольника со сторонами и не больше площади прямоугольника со сторонами .



**Теорема 6.3 (о среднем значении).** Если функция непрерывна на интервале , то существует такая точка что

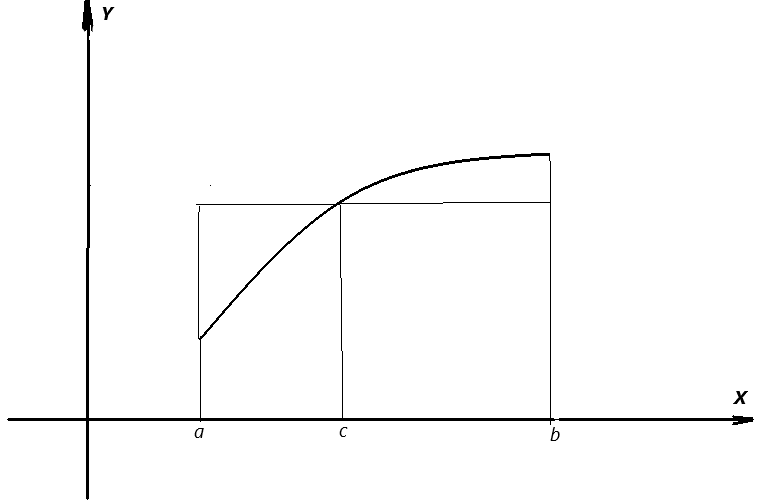
*Доказательство.* Поделим все части неравенства (6.1) на :

По теореме Больцано - Коши непрерывная на интервале функция пробегает все значения между своими наименьшим и наибольшим значениями Следовательно, существует такая точка что

*.*

Умножив обе части этого равенства на получим утверждение теоремы.

Смысл теоремы заключается в том, что существует такая точка что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника со сторонами

**

**7.Связь определённого интеграла с неопределённым интегралом.**

**Теорема 7.1.(Барроу).** Пусть функция непрерывна на интервале Положим , . Тогда .

То есть интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции является первообразной подынтегральной функции.

*Доказательство.* Имеем:

=

*.*

По теореме о среднем значении существует такая точка , что

Тогда

.

Поскольку , то если , то . Поскольку функция непрерывна, то из того, что следует, что .

Тогда

Из теоремы 7.1 вытекает формула, по которой вычисляют определённый интеграл.

Пусть

.

Тогда

,

Следовательно,

(7.1)

Поскольку две первообразные функции отличаются на константу и имеет место очевидное равенство , то в последнем равенстве можно считать произвольной первообразной функции Поменяв переменную интегрирования на и введя обозначение

,

получим:

(7.2)

где =

Эта формула называется формулой Ньютона – Лейбница. Она и является инструментом вычисления определенного интеграла.

**Пример 7.1.** ==.

**8.Замена переменной в определённом интеграле.**

**Теорема 8.1.** ,где функция и её производная непрерывны на интервале , функция обратима на интервале функция непрерывна на интервале, где , . Тогда

,

где – первообразная функции

То есть при вычислении определённого интеграла не нужно возвращаться к первоначальной переменной , а нужно пересчитывать пределы интегрирования для переменной

Доказательство теоремы по существу не отличается от доказательства теоремы 2.1 с учётом приведённого выше замечания и с использованием формулы Ньютона – Лейбница.

На практике осуществляется следующее:

.

**Пример 8.1**. =

*=.*

**Пример 8.2.** ====

==.

**Пример 8.3.** ===

==.

**Пример 8.4.**

=

==.

**9.Формула интегрирования по частям для определённого интеграла.**

Для определённого интеграла формула интегрирования по частям выглядит следующим образом:

.

Она выводится интегрированием по интервалу обеих частей равенства

*.*

**Пример 9.1.**

*=.*

**10. Несобственные интегралы.**

Напомним, что определённый интеграл был определён при условии непрерывности функции на замкнутом конечном интервале

Возникает вопрос, а как возможно определить интеграл, если нарушено условие ограниченности интервала, либо условие непрерывности функции на интервале. Такие интегралы называются несобственными и определяются в приведённых ниже определениях.

**Определение 10.1.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

при этом, если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Сходимость интеграла обозначается следующим образом:

При расходимости же интеграла пишут:

**Определение 10.2.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

при этом, если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

**Определение 10.3.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

где – произвольное число.

При этом, если оба предела в правой части равенства существуют и конечны, то говорят, что интеграл сходится, а если хотя бы один из них не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Определим несобственные интегралы на ограниченных интервалах.

**Определение 10.4.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

при этом, если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

**Определение 10.5.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

при этом, если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а если предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Как видим, смысл состоит в том, что нужно отойти от точки, в которой функция разрывна ( в определениях 10.4 и 10.5 это одна из граничных точек интервала) во внутрь интервала, а затем расстояние, на которое отошли, устремить к нулю.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл и в том случае, если функция разрывна в обеих граничных точках интервала.

А именно.

**Определение 10.6.** Пусть функция непрерывна на интервале Тогда несобственный интеграл определяется равенством

где – произвольное число из интервала .

При этом, если оба предела в правой части равенства существуют и конечны, то говорят, что интеграл сходится, а если хотя бы один из них не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Теперь определим несобственный интеграл в том случае, когда функция разрывна во внутренней точке интервала.

**Определение 10.7.** Пусть функция непрерывна на множестве Тогда несобственный интеграл определяется равенством

.

При этом, если оба предела в правой части равенства существуют и конечны, то говорят, что интеграл сходится, а если хотя бы один из них не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

**Определение 10.8.** Пусть функция непрерывна на интервале

Тогда несобственный интеграл определяется равенством

где , и каждый из интегралов в правой части равенства понимается как несобственный.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл   
для функции , непрерывной на интервале (

Для несобственных интегралов справедливы все свойства определённого интеграла.

**Определение 10.9.** Два несобственных интеграла называются равносходимыми, если из сходимости (расходимости) каждого из них следует сходимость (расходимость) другого.

Равносходимость интегралов обозначается знаком между ними.

**Теорема 10.1.** Если функция непрерывна на интервале , то интеграл равносходим с интегралом для любого

*Доказательство* очевидно в силу непрерывности функции на интервале и равенства

**Замечание 10.2.** Разумеется, аналогичная теорема имеет место для интеграла если функция непрерывна на интервале

Приведём две так называемых теоремы сравнения.

**Теорема 10.2 (первая теорема сравнения).** Пусть функции и непрерывны на интервале (, где каждая из величин может быть как конечной, так и бесконечной. Пусть . Тогда:

1) если расходится интеграл то расходится и интеграл

2) если сходится интеграл то сходится и интеграл

Справедливость теоремы вытекает из свойства 4) определённого интеграла, которое, как было сказано, справедливо и для несобственных интегралов.

Поясним смысл теоремы ещё следующим образом. Интеграл – это сумма.

Если бесконечна сумма составленная из меньших неотрицательных слагаемых, то тем более бесконечна сумма, составленная из больших слагаемых. Если конечна сумма, составленная из больших слагаемых, то тем более конечна сумма, составленная из меньших неотрицательных слагаемых.

**Теорема 10.3 (вторая теорема сравнения).** Пусть функции и непрерывны на интервале [, и

,

где .Тогда интегралы и

равносходимы.

*Доказательство.* По определению предела для любого существует такое , что как только , то . Это неравенство равносильно неравенству

. (10.1)

Поскольку , то Положим .Тогда из неравенства (10.1) в силу первой теоремы сравнения следует равносходимость интегралов и

А в силу теоремы 10.1 – и утверждение теоремы.

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 10.1**. . Интеграл расходится.

**Пример 10.2**.

= Интеграл сходится.

**Пример 10.3**. . Интеграл расходится.

**Замечание 10.3.**  Нетрудно доказать, что сходится при и расходится при .

**Пример 10.4**. . Интеграл расходится.

**Пример 10.5**.

= Интеграл расходится.

**Пример 10.6**. . Интеграл сходится.

**Замечание 10.4.**  Нетрудно доказать, что сходится при и расходится при .

**Пример 10.7.** =. Интеграл сходится.

**Пример 10.8.** ==

=+. Интеграл расходится.

**Пример 10.9.**. Подынтегральная функция является разрывной во внутренней точке интервала [0,2], поскольку

Тогда по определению 10.7

, где каждый из интегралов в правой части равенства понимается в несобственном смысле. И если оба эти интеграла сходятся, то исходный интеграл сходится. А если хотя бы один из них расходится, то исходный интеграл расходится.

Разложив подынтегральную функцию на сумму простейших (это нетрудно сделать самостоятельно), получим:

.

Тогда

.

Первый из интегралов правой части этого равенства сходится, поскольку его подынтегральная функция непрерывна на интервале интегрирования, и он не является несобственным. Второй из интегралов является несобственным, поскольку его подынтегральная функция разрывна на левом конце интервала.

Тогда

=)=+,

Следовательно, интеграл расходится. Тогда расходится и интеграл

, а вместе с ним, по определению, и .

Часто бывает невозможно найти первообразную. Чтобы сделать вывод о сходимости или расходимости несобственного интеграла. Тогда их исследуют по теоремам сравнения.

Приведём примеры исследования интегралов на сходимость с помощью теорем сравнения.

Сначала рассмотрим два простых случая применения второй теоремы сравнения.

**Пример 10.10.** Рассмотрим интеграл *I=* . Поскольку числитель дроби растёт, как , а знаменатель растёт, как , то нетрудно догадаться, что исследуемый интеграл равносходим с интегралом , который расходится (см. пример 10.1). Проверим равносходимость интегралов по второй теореме сравнения. Имеем:

*.*

Так как , то интегралы равносходимы. Раз расходится интеграл

, то расходится и интеграл *I.*

**Пример 10.11.** Рассмотрим интеграл *I=* . Поскольку числитель дроби растёт, как , а знаменатель растёт, как , то нетрудно догадаться, что исследуемый интеграл равносходим с интегралом , который сходится (см. пример 10.2). Проверим равносходимость интегралов по второй теореме сравнения. Имеем:

*.*

Так как , то интегралы равносходимы. Раз сходится интеграл

, то сходится и интеграл *I.*

**Пример 10.12.** *I=*. Задача настолько проста, что очевидно, что интеграл равносходим с интегралом и, следовательно, расходится. Но вторая теорема сравнения неприменима, поскольку предел

не существует.

Поэтому применим первую теорему сравнения.

Следует особо подчеркнуть, что если есть предпосылки предполагать, что исследуемый интеграл расходится, то следует искать функцию, меньшую подынтегральной функции, для которой известно, что интеграл расходится. Поскольку то . Интеграл расходится, следовательно, по первой теореме сравнения исследуемый интеграл тоже расходится.

**Пример 10.13.** *I=*. Очевидно, что интеграл равносходим с интегралом и, следовательно, сходится. Но опять вторая теорема сравнения неприменима, поскольку предел

не существует.

Следует особо подчеркнуть, что если есть предпосылки предполагать, что исследуемый интеграл сходится, то следует искать функцию, большую подынтегральной функции, для которой известно, что интеграл сходится. Поскольку то . Интеграл сходится, следовательно, по первой теореме сравнения исследуемый интеграл тоже сходится.

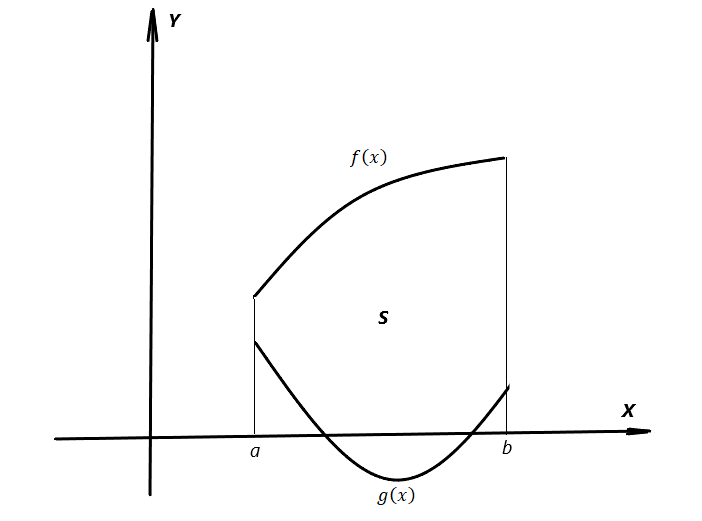
**11.О некоторых приложениях определённого интеграла.**

Как уже говорилось, к понятию определённого интеграла приводит задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

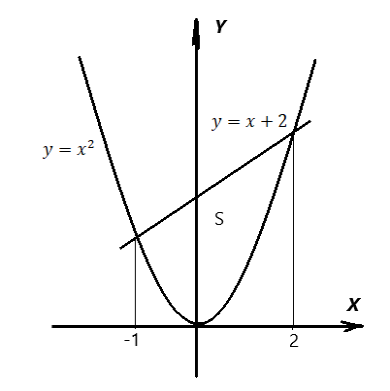
Нетрудно понять, что площадь фигуры, заключённой между линиями

, где для , и прямыми

вычисляется по формуле



**Пример 11.1** Вычислить площадь фигуры, заключённой между линиями и

**

Вычислим пределы изменения переменной из равенства . Решив квадратное уравнение, получим: Тогда

=.

Рассмотрим некоторые случаи вычисления объёмов с помощью определённого интеграла.

Пусть тело ограничено некоторой поверхностью и плоскостями

, причём площадь его сечения плоскостью, перпендикулярной оси *X*  при произвольном равна . Тогда нетрудно понять, что объём этого тела вычисляется по формуле

(11.1)

Рассмотрим вычисления объёмов так называемых тел вращения.

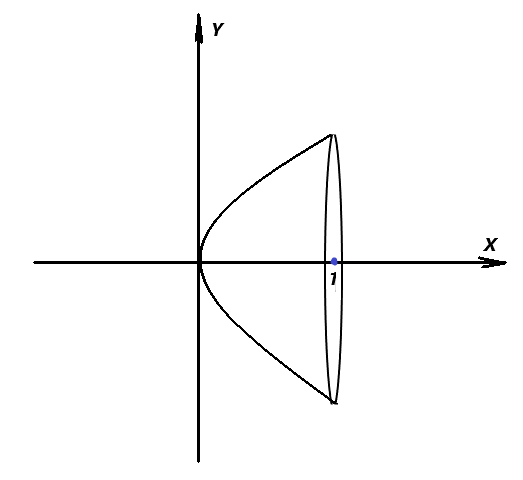
Пусть задана криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции осью и прямыми Если вращать эту трапецию вокруг осей , то получатся тела, объёмы которых соответственно вычисляются по формулам:

*.*

Первая из этих формул является частным случаем формулы (11.1), поскольку равняется площади сечения при произвольном

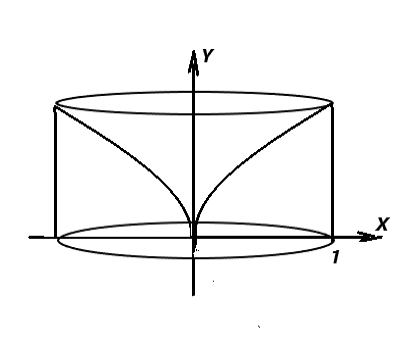
Вторая из формул выводится из тех соображений, что - это площадь боковой поверхности цилиндра высоты с окружностью радиуса в основании. Умножив эту площадь на , получим объём слоя толщины . Проинтегрировав по от до , получим искомый объём

**Пример 11.2.** Вычислить объёмы тел вращения вокруг осей фигуры, ограниченной линиями ,

**

Тогда

==.



*.*

**ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ИНТЕГРАЛАМ**

Пусть номер студента в списке где - число десятков, а число единиц. Тогда его вариант имеет следующий вид.

Вычислить неопределённые интегралы:

1) ,

2) ,

3) ,

4) ,

5) .

Указать вид разложения дроби на сумму простейших, не находя коэффициентов:

6) .

Вычислить определённые интегралы:

7) ,

8) .

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

9) ,

10) .

**Указания. 1) При интегрировании неправильной дроби сначала выделять целую часть. 2) При вычислении определённого интеграла, производя замену переменной, пересчитывать пределы. 3) При исследовании несобственных интегралов отходить от бесконечности и точки, в которой подынтегральная функция разрывна; при этом не забывать о значке предела!**

**Ввиду большого количества заданий не присылать файлы с длинными названиями! Переименовывать их! Желательно вообще все фото вставлять в один Word-овский файл, чтобы мне было удобно их прокручивать.**

**Ввиду большого количества заданий и отсутствие времени буду сразу выставлять оценки, указывая на ошибки, но не предоставляя возможности до бесконечности их исправлять. Работы высылать в указанные сроки!**